JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 20, 23–45 (1977)

Interpolation mit regulären Splines

HERBERT ARNDT

Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik der Universität Münster, 44 Münster, Roxeler Straße 64, West Germany

Communicated by G. Meinardus

Received July 12, 1975

This paper is concerned with interpolation of real functions on compact intervals by nonlinear splines called regular splines introduced by R. Schaback and H. Werner. Regular splines contain the classical polynomial splines and represent a more flexible class; for example in the neighborhood of singularities one can use rational splines. We consider boundary value and periodic interpolation problems. In the case of boundary value problems interpolation yields unique results. With regard to the existence of interpolants we develop a nonlinear system of equations that can be written as the sum of a linear system of equations, known from the theory of polynomial splines, and a perturbation caused by the nonlinearities. The main tool in achieving this is a theorem which states that divided differences may be written as convex combinations of special divided differences that operate only on knot intervals. Convergence properties conclude this paper.

1. EINFÜHRUNG

Gegeben seien ein reelles Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ und k Knoten t_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, mit

$$a =: t_0 < t_1 < \cdots < t_{k+1} := b. \tag{1.1}$$

Zu einem $n \in \mathbb{N}$ seien weiterhin für jedes $I_i := [t_i, t_{i+1}]$ Klassen $X_i \subset C^n[I_i]$ gegeben, $i = 0, 1, \ldots, k$. Dann definieren wir die Klasse S_X der (nichtlinearen) Splines bezüglich $X = (X_0, X_1, \ldots, X_k)$ und der Zerlegung (1.1) als

$$S_X := \{s \in C^n[a, b] \mid s_{|I_i} = p_i + x_i\,;\, p_i \in \mathfrak{P}_{n-1}\,;\, x_i \in X_i\,;\, i = 0, 1, \ldots, k\}; \tag{1.2}$$

dabei sei $\mathfrak{P}_m$ die Menge aller Polynome höchstens m-ten Grades. Wir betrachten die folgenden Interpolationsprobleme:

ISSN 0021-9045

A. *Randwertproblem*

Gegeben seien natürliche Zahlen n_0, n_1 mit $n_0 + n_1 = n$ und eine Funktion $f \in C^n[a, b]$.

Gesucht ist eine Funktion $s \in S_X$ mit

$$s^{(j)}(t_i) = f^{(j)}(t_i) \begin{cases} i = 0; & j = 0, 1, \ldots, n_0, \\ i = 1, 2, \ldots, k; & j = 0, \\ i = k+1; & j = 0, 1, \ldots, n_1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Für periodische Funktionen $f \in C(\mathbb{R})$ kann die Zerlegung (1.1) periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Es sei

$$t_{i+k+1} := t_i + (b - a), \qquad i \in \mathbb{N},$$
$$t_{-i} := t_{k+1-i} - (b - a), \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Dann ist

$$\cdots < t_j < t_{j+1} < \cdots, \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{1.4}$$

eine periodische Zerlegung von $\mathbb{R}$ mit der Periode $b - a$.

B. *Periodisches Interpolationsproblem*

Gegeben sei eine periodische Funktion $f \in C^n(\mathbb{R})$ mit der Periode $b - a$. Gesucht ist eine Funktion $s \in S_X$ mit

$$\begin{aligned} s(t_i) &= f(t_i), \qquad j = 0, 1, \ldots, k+1, \\ s^{(j)}(a) &= s^{(j)}(b), \qquad j = 0, 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Eine Lösung s von (1.5) kann dann periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

Beispiel 1.1. (1) Für $i = 0, 1, \ldots, k$ sei

$$X_i := \{x \in \mathfrak{P}_{n+1} \mid x(t) = c(t - t_i)^n + d(t - t_i)^{n+1};\ c, d \in \mathbb{R};\ t \in I_i\}.$$

Dann heißt $S_{n+1,k} := S_X$ Klasse der polynomialen Splines.

(2) Für $i = 0, 1, \ldots, k$ sei

$$X_i := \left\{ x \in C^n[I_i] \mid x(t) = \frac{m_i^{n+1}}{n!} \cdot \frac{(t - t_i)^n}{1 + (t - t_i)\dfrac{m_i - m_{i+1}}{(t_{i+1} - t_i)\, m_{i+1}}}; \right.$$
$$\left. m_i, m_{i+1} \in \mathbb{R}_+;\ t \in I_i \right\}.$$

Dann heißt $\mathfrak{S}_{n,k} := S_X$ Klasse der rationalen Splines (mit linearen Nennern).

Um zu hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Lösung des

Randwertproblems und periodischen Interpolationsproblems zu gelangen, fordern wir von den-Funktionsklassen X_i, daß sie die folgenden Bedingungen (R), (D) und (B) erfüllen:

(R) Die Klassen X_i, $i = 0, 1,..., k$, seien regulär von der Ordnung n in I_i.

Dabei heißt eine Klasse $\mathfrak{F} \subset C^n[a, b]$ regulär von der Ordnung n in $[a, b]$, wenn für zwei Funktionen $s, \tilde{s} \in \mathfrak{F}$ gilt: Besitzt $(s - \tilde{s})^{(n)}$ mehr als eine Nullstelle in $[a, b]$, so folgt $s = \tilde{s}$. Reguläre Klassen X_i haben die Eigenschaft, daß ihre Elemente durch ihre n-ten Ableitungen in den Punkten t_i und t_{i+1} parametrisiert werden können, d.h. für $x_i \in X_i$ können wir

$$x_i(t) = x_i(M_i, M_{i+1}, t), \qquad t \in I_i,$$

schreiben mit (1.6)

$$M_j = \frac{d^n}{dt^n} x_i(M_i, M_{i+1}, t_j), \qquad j = i \quad \text{und} \quad j = i + 1.$$

(D) Die regulären Klassen X_i, $i = 0, 1,..., k$, seien glatt vom Grade $n + 2$, d.h. es gelte $X_i \subset C^{n+2}[I_i]$ und die Funktionen (1.6) und ihre Ableitungen mögen stetig von M_i und M_{i+1} abhängen.

(B) Die Funktionen $x_i \in X_i$, $i = 0, 1,..., k$, seien $(n + 2)$-beschränkt, d.h. Schranken für $x_i^{(n)}(t_i)$ und $x_i^{(n)}(t_{i+1})$ innerhalb ihrer Definitionsbereiche und für $| x_i^{(n)}(t_{i+1}) - x_i^{(n)}(t_i)|/| t_{i+1} - t_i |$ führen zu Schranken für $x_i^{(n+2)}$ in I_i.

Bezüglich der Definition der Bedingungen (R), (D) und (B) vergleiche man mit Werner [15]; dort wird die Bedeutung der Bedingung (B) diskutiert.

Weiterhin benötigen wir den Begriff der Zulässigkeit (vgl. Schaback [12]): Das Tupel $(M_0, M_1,..., M_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+2}$ heißt zulässig (für X), wenn M_i, $i = 0, 1,..., k + 1$, zulässige Parameter für die Funktionen (1.6) sind.

Die Bedingungen (R), (D) und (B) sind für die Klassen X_i aus Beispiel 1.1 erfüllt. Während im ersten Beispiel alle Tupel $(M_0, M_1,..., M_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+2}$ zulässig sind, erweisen sich im zweiten Beispiel alle Tupel $(M_0, M_1,..., M_{k+1}) \in \mathbb{R}_+^{k+2}$ als zulässig.

Interpolationsprobleme mit Splines aus $S_{n+1,k}$ sind z.B. von Ahlberg *et al.* [1] und Karlin und Ziegler [9] behandelt worden. Da diese Probleme linear sind, steht die Struktur der zugehörigen Matrizen im Vordergrund der Untersuchungen. Im Fall $n = 2$ konnte Schaback [11] ein Kriterium für die Interpolation bzgl. $\mathfrak{S}_{2,k}$ angeben, jedoch lassen sich seine Ergebnisse nicht auf den Fall $n > 2$ übertragen (Arndt [4]). Werner [14], Braess und Werner [7] und Schomberg [13] haben die Klasse $\mathfrak{S}_{2,k}$ zur Approximation stetiger Funktionen herangezogen, vgl. auch Braess [6] in diesem Zusammenhang.

Interpolationsprobleme mit regulären Splines sind für $n = 2$ von Schaback [12] und Werner [15] untersucht worden. Runge [10] und Werner [15] haben diese Ergebnisse auf die Lösung von Anfangswertproblemen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen angewandt.

In dieser Arbeit sollen die Ergebnisse von Schaback und Werner auf beliebiges $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinert werden. Dabei stehen die Eigenschaften gewisser Differenzenquotienten im Vordergrund der Untersuchungen. Ähnlich wie bei polynomialen Splines wird ein Gleichungssystem aufgestellt, dessen rechte Seite aus Differenzenquotienten über den Knoten und gegebenen Daten besteht. Diese Differenzenquotienten werden als Konvexkombinationen von Differenzenquotienten dargestellt, die nur auf Knotenintervallen wirken. Asymptotische Entwicklungen solcher Differenzenquotienten gestatten eine Lösung der Interpolationsaufgaben, indem die zugehörigen Gleichungssysteme als "gestörte" lineare Gleichungssysteme aufgefaßt werden, deren linearen Anteile aus der Theorie der polynomialen Splines bekannt sind.

In einer späteren Arbeit sollen spezielle reguläre Splines und ihre numerische Behandlung untersucht werden.

2. Eindeutigkeit des Randwertproblems

Wir werden zeigen, daß für reguläre Klassen X_i höchstens eine Interpolierende des Randwertproblems (1.3) existiert. Den Eindeutigkeitsbeweis führen wir mit Hilfe der Anzahl der Nullstellen der Differenz zweier Splines aus S_X. Dazu definieren wir die Vielfachheit einer Nullstelle wie üblich: Eine Funktion $g \in C^m[a, b]$ besitzt in $t \in [a, b]$ eine Nullstelle der Vielfachheit r, wenn

$$g(t) = g'(t) = \cdots = g^{(r-1)}(t) = 0, \qquad r \leqslant m + 1,$$

gilt. Zwei Nullstellen t und t^* von g heißen separiert, wenn g nicht identisch zwischen ihnen verschwindet; Vielfachheiten seien zugelassen.

Für die folgenden Ausführungen vergleiche man Braess und Werner [7] und Arndt [3].

Lemma 2.1. *Es seien $s, s^* \in S_X$, und die Klassen X_i seien regulär. Dann besitzt $w := (s - s^*)^{(n)}$ höchstens $k + 1$ separierte Nullstellen. Falls w sogar $k + 2$ Nullstellen besitzt, verschwindet w identisch auf einem Teilintervall von $[a, b]$.*

Beweis. Wir nehmen an, w besäße $k + 2$ separierte Nullstellen. Dann lägen in einem Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ mindestens zwei separierte Nullstellen. Dies ist ein Widerspruch zur Regularität der Klassen X_i.

Besitzt w mindestens $k + 2$ Nullstellen, so sind diese nach dem ersten Teil des Lemmas nicht separiert. ▮

LEMMA 2.2. *Es seien $s, s^* \in S_X$ und die Klassen X_i seien regulär. Dann hat die Differenz $r := s - s^*$ höchstens $n + k + 1$ separierte Nullstellen. Falls r sogar $n + k + 2$ Nullstellen besitzt, verschwindet r auf einem Teilintervall von $[a, b]$ identisch.*

Beweis. Angenommen r besitze $n + k + 2$ separierte Nullstellen. Nach dem Satz von Rolle hat $w := r^{(n)}$ dann $k + 2$ Nullstellen; diese sind ebenfalls separiert. Dies widerspricht der ersten Aussage von Lemma 2.1. Hieraus folgt sofort die zweite Behauptung. ▮

SATZ 2.3. *Es seien $s, s^* \in S_X$ mit regulären Klassen X_i. Die Differenz $r := s - s^*$ habe $n + k + 2$ Nullstellen $z_1 \leqslant z_2 \leqslant \cdots \leqslant z_{n+k+2}$ mit*

$$z_i < t_i < z_{n+i+2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.1}$$

Dann gilt $s = s^*$ auf $[a, b]$.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion über k. Für $k = 0$ folgt die Aussage des Satzes aus Lemma 2.2.

Wir nehmen nun an, der Satz sei für Intervalle mit höchstens $k - 1$ Knoten bewiesen und zeigen seine Richtigkeit für Intervalle mit k Knoten.

Da r mindestens $n + k + 2$ Nullstellen besitzt, verschwindet r nach Lemma 2.2 auf einem Teilintervall $[t_j, t_{j+1}]$ identisch.

Es sei $j \geqslant 1$. Der Punkt t_j ist eine $(n + 1)$-fache Nullstelle von r. Wir können daher definieren:

$$\begin{aligned} z_i^* &:= z_i, \qquad & i &= 1, 2, \ldots, j, \\ z_i^* &:= t_j, \qquad & i &= j + 1, j + 2, \ldots, n + j + 1. \end{aligned}$$

Wegen (2.1) gilt

$$z_i^* < t_i < z_{n+i+2}^*, \qquad i = 1, 2, \ldots, j - 1. \tag{2.2}$$

Also besitzt r im Intervall $[t_0, t_j]$ mindestens $n + (j - 1) + 2$ Nullstellen, die (2.2) erfüllen. Da im Intervall $[t_0, t_j]$ höchstens $k - 1$ Knoten liegen, können wir unsere Induktionsvoraussetzung auf das Intervall $[t_0, t_j]$ anwenden. Also gilt $r = 0$ auf $[t_0, t_j]$.

Entsprechend schließt man auf das Verschwinden von r im Interval $[t_{j+1}, t_{k+1}]$, falls $j \leqslant k - 1$.

Insgesamt ist damit gezeigt, daß r im Intervall $[a, b]$ identisch verschwindet. ▮

Als Anwendung erhalten wir unmittelbar

SATZ 2.4. *Ist das Randwertproblem* (1.3) *bezüglich* S_X *mit regulären Klassen* X_i *lösbar, so ist die Lösung eindeutig bestimmt.*

3. DIFFERENZENQUOTIENTEN

Bei der Behandlung der Interpolationsaufgaben mit regulären Splines erweist sich der Begriff des Differenzenquotienten als sehr nützlich. Für eine ausführliche Darstellung sei z.B. auf Werner und Schaback [16] verwiesen. Außerdem werden wir die für unsere Zwecke wichtigsten Hilfsmittel bereitstellen.

Gegeben seien $m + 1$ paarweise verschiedene reelle Zahlen t_i, $i = 0, 1,\ldots, m$, mit

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_m \tag{3.1}$$

und $m + 1$ natürliche Zahlen ν_i, $i = 0, 1,\ldots, m$, mit $\sum_{i=0}^m \nu_i = n + 1$. Dann bezeichnen wir mit T die Punkte

$$\underbrace{t_0, t_0,\ldots, t_0}_{\nu_0}, \underbrace{t_1,\ldots, t_1}_{\nu_1},\ldots, \underbrace{t_m, t_m,\ldots, t_m}_{\nu_m}$$

und mit $T\backslash t_i$ die Punkte

$$\underbrace{t_0, t_0,\ldots, t_0}_{\nu_0},\ldots, \underbrace{t_i, t_i,\ldots, t_i}_{\nu_i - 1},\ldots, \underbrace{t_m, t_m,\ldots, t_m}_{\nu_m}.$$

Weiterhin bezeichnen wir mit $\Delta^n(T)f$ den n-ten Differenzenquotienten der Funktion f über den Stützstellen T. Mit der Schreibweise $\Delta_t{}^n(T)f$ deuten wir an, daß das lineare Funktional $\Delta^n(T)$ bezüglich der Variablen t anzuwenden ist. Im Falle $m \geqslant 1$ gilt die Rekursionsformel

$$\Delta^n(T)f = \frac{1}{t_m - t_0}(\Delta^{n-1}(T\backslash t_0)f - \Delta^{n-1}(T\backslash t_m)f). \tag{3.2}$$

Bezeichnen wir die Punkte von T mit $t_0{}^*, t_1{}^*,\ldots, t_n{}^*$, so gilt für zwei Funktionen $f, g \in C^n[a, b]$ die Produktformel

$$\Delta^n(T)[f \cdot g] = \sum_{i=0}^n \Delta^i(t_0{}^*,\ldots, t_i{}^*)f \cdot \Delta^{n-i}(t_i{}^*,\ldots, t_n{}^*)g. \tag{3.3}$$

Für zwei Funktionen $f, g \in C^n[t_0, t_m]$, für die

$$f^{(j)}(t_i) = g^{(j)}(t_i), \qquad i = 0, 1,\ldots, m; j = 0, 1,\ldots, \nu_i - 1,$$

gilt, schreiben wir kurz $f = g$ auf T.

Das Randwertproblem (1.3) enthält $n+k+2$ Interpolationsbedingungen. Aus den in (1.3) genannten $n+k+2$ Funktionswerten von f können wir $k+2$ "aufeinanderfolgende" n-te Differenzenquotienten bilden, die wir der Reihe nach mit

$$D_0(f),\ D_1(f),\dots,\ D_{k+1}(f) \tag{3.4}$$

bezeichnen wollen. Genauer sei

$$D_0(f) := \Delta^n(\underbrace{t_0\,,\,t_0\,,\dots,\,t_0}_{n_0+1}\,,\,\underbrace{t_1\,,\,t_2\,,\dots}_{n-n_0})\,f,$$

$$D_1(f) := \Delta^n(\underbrace{t_0\,,\,t_0\,,\dots,\,t_0}_{n_0}\,,\,\underbrace{t_1\,,\,t_2\,,\dots}_{n-n_0+1})\,f,$$

$$\dots \qquad\qquad \dots$$

$$D_{k+1}(f) := \Delta^n(\underbrace{\dots,\,t_{k-1}\,,\,t_k}_{n-n_1}\,,\,\underbrace{t_{k+1}\,,\,t_{k+1}\,,\dots,\,t_{k+1}}_{n_1+1})\,f.$$

Entsprechend bilden wir für periodische Funktionen $f\in C^n(\mathbb{R})$ mit den Stützstellen (1.4) die $k+1$ "aufeinanderfolgenden" n-ten Differenzenquotienten

$$\tilde{D}_0(f),\ \tilde{D}_1(f),\dots,\ \tilde{D}_k(f)$$

mit (3.5)

$$\tilde{D}_i(f) := \Delta^n(t_i\,,\,t_{i+1}\,,\dots,\,t_{i+n})\,f, \qquad i=0,1,\dots,k.$$

Zur einheitlichen Darstellung der Differenzenquotienten (3.4) und (3.5). wenden wir uns wieder der Zerlegung (3.1) zu und bezeichnen mit Z die Stützstellen

$$\underbrace{t_0\,,\,t_0\,,\dots,\,t_0}_{n}\,,\,\underbrace{t_1\,,\,t_1\,,\dots,\,t_1}_{n}\,,\dots,\,\underbrace{t_m\,,\,t_m\,,\dots,\,t_m}_{n}$$

d.h. Z besteht unter Berücksichtigung der Vielfachheit aus $(m+1)\cdot n$ Punkten. Aus Z können $n\cdot m$ Blöcke Z_i, $i=1,2,\dots,n\cdot m$, von $n+1$ aufeinanderfolgenden Punkten von Z gebildet werden; d.h. gilt $i=n\cdot l+j$ mit $0\leqslant l\leqslant m-1$, $1\leqslant j\leqslant n$, so bestehe Z_i aus den Punkten

$$\underbrace{t_l\,,\,t_l\,,\dots,\,t_l}_{n+1-j}\,,\,\underbrace{t_{l+1}\,,\,t_{l+1}\,,\dots,\,t_{l+1}}_{j}\,.$$

Da wir auf diese Zerlegung von i öfter zurückgreifen, setzen wir

$$\text{Komp}\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}^2, \qquad \text{Komp}(i)=(l,j).$$

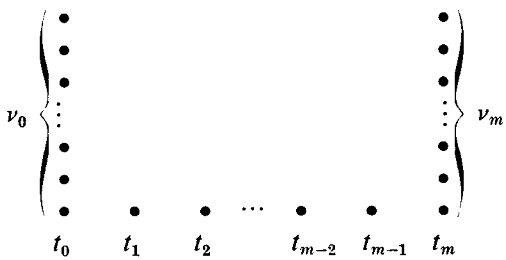
Für den Rest dieses Abschnittes bezeichne T die Stützstellen

$$\underbrace{t_0\,,\, t_0\,,\dots,\, t_0}_{\nu_0}\,,\, t_1\,,\, t_2\,,\dots,\, t_{m-1}\,,\, \underbrace{t_m\,,\, t_m\,,\dots,\, t_m}_{\nu_m}\,,$$

also $\nu_i = 1$ für $i = 1, 2, \dots, m-1$ und

$$\nu_0 + \nu_m = n + 1 - (m-1) = n + 2 - m. \tag{3.6}$$

Weiterhin sei $h_i := t_{i+1} - t_i\,,\quad i = 0, 1, \dots, m-1$. Die folgende Skizze veranschaulicht die Elemente von T:



Mit diesen Vereinbarungen gilt der für das Folgende grundlegende

SATZ 3.1. *Es sei $m \geqslant 1$. Dann gibt es zu T reelle Zahlen c_i, $i = 1, 2, \dots,$ $n \cdot m$, so daß für jedes $f \in C^{n-1}[t_0\,, t_m]$ gilt*

$$\Delta^n(T)\,f = \sum_{i=1}^{n\cdot m} c_i \cdot \Delta^n(Z_i)\,f. \tag{3.7}$$

Wir bemerken, daß Satz 3.1 allgemeiner für beliebige $(n+1)$-punktige Stützstellenmengen T mit mindestens zwei verschiedenen Stützstellen gilt.

Zum Beweis benutzen wir zwei Lemmata. Mit Hilfe der Knickfunktion

$$\begin{aligned} (t)_+ &= t, & t &\geqslant 0,\\ &= 0, & t &< 0, \end{aligned}$$

definieren wir für i mit $(l, j) = \mathrm{Komp}(i)$ die Funktionen

$$f_i(t) := (t - t_l)^{n-j}\,(t - t_{l+1})_+^{j-1}, \qquad i = 1, 2, \dots, n \cdot m. \tag{3.8}$$

Es gilt $f_i \in C^{j-2}[t_0\,, t_m]$, wobei für $j = 1$ eine Sprungstelle auftreten kann. Deshalb wollen wir vereinbaren, daß unter $f_i^{(r)}(t)$, $r = 0, 1, \dots, n$, stets die Rechtsableitung im Punkte t zu verstehen ist. Mit diesen Vereinbarungen läßt sich das folgende Lemma leicht beweisen.

LEMMA 3.2. *Es sei* $f \in C^{n-1}[t_0, t_m]$. *Dann gibt es genau eine Funktion*

$$s(t) = p(t) + \sum_{i=1}^{n \cdot m} d_i f_i(t), \qquad p \in \mathfrak{P}_{n-1}, \quad d_i \in R, \tag{3.9}$$

mit

$$s^{(r)}(t_i) = f^{(r)}(t_i), \qquad i = 0, 1,..., m; \quad r = 0, 1,..., n-1.$$

Aufgrund von Lemma 3.2 genügt es, Satz 3.1 für alle Funktionen (3.9) zu beweisen. Da die f_i in der Darstellung (3.9) linear auftreten, genügt es weiterhin, Satz 3.1 für die $n \cdot m$ Funktionen f_i, $i = 1, 2,..., n \cdot m$ nachzuweisen.

LEMMA 3.3. *Es sei* $(l, j) = \text{Komp}(i)$. *Dann gilt*

$$\Delta^n(Z_r) f_i = (1/h_l)\, \delta_{ri}, \qquad r, i = 1, 2,..., n \cdot m. \tag{3.10}$$

Beweis. Es sei $(l^*, j^*) = \text{Komp}(r)$. Gilt $l \neq l^*$, so ist (3.10) sicherlich richtig, da dann n-te Differenzenquotienten über Polynome $(n-1)$-ten Grades gebildet werden. Sei also $l = l^*$. O.B.d.A. können wir $l = 0$ annehmen. In diesem Fall geht (3.10) über in

$$\Delta^n(Z_{j^*}) f_j = (1/h_0)\, \delta_{jj^*}, \qquad j, j^* = 1, 2,..., n. \tag{3.11}$$

Es sei $j^* < j$. Da $f_j(t) = 0$ für $t < t_1$ gilt und in t_1 alle Ableitungen bis zur Ordnung $j-2$ verschwinden, folgt offenbar

$$\Delta^n(Z_{j^*}) f_j = \Delta^n(Z_{j^*})\, 0 = 0, \qquad j^* < j.$$

Ähnlich gilt für $j^* > j$

$$\begin{aligned} \Delta^n(Z_{j^*}) f_j &= \Delta^n(Z_{j^*})[(t - t_0)^{n-j} (t - t_1)_+^{j-1}] \\ &= \Delta^n(Z_{j^*})[(t - t_0)^{n-j} (t - t_1)^{j-1}] = 0, \end{aligned}$$

da f_j und das Polynom $(t - t_0)^{n-j} (t - t_1)^{j-1}$ in den Stützstellen von Z_{j^*} in den bei der Bildung der Differenzenquotienten auftretenden Funktionswerten und Ableitungen übereinstimmen. Damit ist (3.11) für $j \neq j^*$ bewiesen.

Sei nun $j = j^*$. Dann gilt

$$\Delta^{n-1}(Z_j \backslash t_1) f_j = \Delta^{n-1}(Z_j \backslash t_1)\, 0 = 0,$$

da f_j und seine Ableitungen in $Z_j \backslash t_1$ die Werte 0 haben. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \Delta^{n-1}(Z_j \backslash t_0) f_j &= \Delta^{n-1}(Z_j \backslash t_0)[(t - t_0)^{n-j} (t - t_1)_+^{j-1}] \\ &= \Delta^{n-1}(Z_j \backslash t_0)[(t - t_0)^{n-j} (t - t_1)^{j-1}] = 1, \end{aligned}$$

da f_j in $Z_j \backslash t_0$ mit dem Polynom $(t - t_0)^{n-j} (t - t_1)^{j-1}$ übereinstimmt. Damit folgt (3.11) für $j = j^*$ aus der Rekursionsformel (3.2). ▮

Beweis von Satz 3.1: Es sei $(l, j) = \text{Komp}(i)$ und

$$c_i := h_l \Delta^n(T) f_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \cdot m. \tag{3.12}$$

Mit dieser Definition folgt die Behauptung aus Lemma 3.2 und 3.3. ▮

Die folgenden vier Lemmata beschreiben die Struktur der Konstanten (3.12).

LEMMA 3.4. *Es gilt*

$$\sum_{i=1}^{n \cdot m} c_i = 1. \tag{3.13}$$

Beweis. Einsetzen der Funktion $f(t) = t^n$ in (3.7). ▮

Die folgende Aussage findet man z.B. in [8].

LEMMA 3.5. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \Delta_x{}^n(T)(x - t)_+^{n-1} &> 0, && \text{falls} \quad t \in (t_0, t_m), \\ \Delta_x{}^n(T)[(x - t_0)^{n-1} (x - t_1)_+^0] &> 0, && \text{falls} \quad \nu_0 = n, \\ \Delta_x{}^n(T)[(x - t_0)^0 (x - t_1)_+^{n-1}] &> 0, && \text{falls} \quad \nu_1 = n, \\ \Delta_x{}^n(T)(x - t)_+^{n-1} &= 0 && \text{sonst.} \end{aligned}$$

LEMMA 3.6. *Es sei* $g \in C^n[t_0, t_m]$. *Dann gilt*

$$\Delta_t{}^n(T)[(t - t_r) \cdot g(t)] = \Delta^{n-1}(T \backslash t_r)\, g, \qquad r = 0, 1, \ldots, m.$$

Beweis. Anwendung der Produktformel (3.3). ▮

LEMMA 3.7. *Für die in* (3.12) *definierten Konstanten gilt*

$$c_i > 0 \qquad \text{für } i = n - \nu_0 + 1, n - \nu_0 + 2, \ldots, n(m-1) + \nu_m \tag{3.14}$$

und

$$c_i = 0 \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n - \nu_0 \text{ und } i = n(m-1) + \nu_m + 1, \ldots, n \cdot m. \tag{3.15}$$

Beweis. Nach (3.12) gilt mit $(l, j) = \text{Komp}(i)$

$$D := (c_i / h_l) = \Delta^n(T)[(t - t_l)^{n-j} (t - t_{l+1})_+^{j-1}].$$

Für $j = n$ folgen die Behauptungen sofort aus Lemma 3.5. Sei also $j < n$. Wir spalten $(t - t_l)$ auf in

$$(t - t_l) = c(t - t_0) + d(t - t_m)$$

mit

$$c = \frac{t_m - t_l}{t_m - t_0}, \qquad d = \frac{t_l - t_0}{t_m - t_0}.$$

Mit Lemma 3.6 folgt

$$\begin{aligned} D &= \Delta^n(T)[(c(t - t_0) + d(t - t_m))(t - t_l)^{n-j-1} (t - t_{l+1})_+^{j-1}] \\ &= c\Delta^{n-1}(T\backslash t_0)[(t - t_l)^{n-j-1} (t - t_{l+1})_+^{j-1}] \\ &\quad + d\Delta^{n-1}(T\backslash t_m)[(t - t_l)^{n-j-1} (t - t_{l+1})_+^{j-1}]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Damit folgen die Behauptungen durch Induktion über n. ∎

Formel (3.16) liefert eine Rekursionsformel zur Berechnung der Koeffizienten c_i.

Für weitere Untersuchungen führen wir eine neue Bezeichnung ein. Es sei $(l, j) = \mathrm{Komp}(i)$. Dann setzen wir

$$D_l^n(n + 1 - j, j) f := \Delta^n(Z_i) f = \Delta^n(\underbrace{t_l, \ldots, t_l}_{n+1-j}, \underbrace{t_{l+1}, \ldots, t_{l+1}}_{j}) f$$

und (3.17)

$$D_{l-1}(0, n + 1) f := D_l(n + 1, 0) f := \frac{f^{(n)}(t_l)}{n!}.$$

Die folgende Aussage über diese Differenzenquotienten beweist man leicht durch Induktion.

Lemma 3.8. *Es sei $f \in C^n[t_l, t_{l+1}]$. Dann gilt für $j = 1, 2, \ldots, n$*

$$\begin{aligned} D_l^n(n + 1 - j, j) f = \frac{1}{h_l^n} \Bigg[(-1)^j \sum_{i=1}^{n+1-j} \binom{n-i}{j-1} h_l^{i-1} \frac{f^{(i-1)}(t_l)}{(i-1)!} \\ + \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j-i} \binom{n-i}{n-j} h_l^{i-1} \frac{f^{(i-1)}(t_{l+1})}{(i-1)!}\Bigg]. \end{aligned}$$

Später benutzen wir noch

Lemma 3.9. *Es seien $g, g^* \in C^n[t_0, t_m]$ mit $g = g^*$ auf $T\backslash t_{i_0}$ und $\Delta^n(T) g = \Delta^n(T) g^*$. Dann gilt $g = g^*$ auf T.*

Zum Beweis vergleiche man die Interpolationspolynome von g und g^* bezüglich T.

Es sei nun $f \in C^{n+2}[t_0, t_1]$. Wir entwickeln den n-ten Differenzenquotienten

$$D^n(n+1-j,j)f := D_0^n(n+1-j,j)f, \qquad h := h_0.$$

LEMMA 3.10 (vgl. Werner [15]). *$D^n(n+1-j,j)f$ hat eine Entwicklung der Form*

$$D^n(n+1-j,j)f = \frac{n+1-j}{(n+1)!} M_0 + \frac{j}{(n+1)!} M_1 + R_j(t_0, t_1, f)$$

mit

$$M_i := f^{(n)}(t_i), \qquad i = 0, 1,$$

und

$$R_j(t_0, t_1, f)$$
$$= \frac{1}{(n+1)!} \int_{t_0}^{t_1} [D_x^n(n+1-j,j)(x-t)_+^{n+1} - j \cdot (t_1 - t)] f^{(n+2)}(t)\, dt.$$

Weiterhin gilt

$$R_j(t_0, t_1, f) = O((t_1 - t_2)^2). \tag{3.18}$$

Beweis. Nach dem Darstellungssatz von Peano für lineare Funktionale (siehe z.B. Werner und Schaback [16]) hat $D^n(n+1-j,j)f$ eine Darstellung der Form (Entwicklung um t_0)

$$D^n(n+1-j,j)f = c_j f^{(n)}(t_0) + d_j f^{(n+1)}(t_0)$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} f^{(n+2)}(t)\, D_x^n(n+1-j,j) \frac{(x-t)_+^{n+1}}{(n+1)!}\, dt \tag{3.19}$$

mit

$$c_j = \frac{1}{n!}, \qquad d_j = D_x^n(n+1-j,j) \frac{(x-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Nach der Taylorformel gilt

$$\frac{d_j}{h} f^{(n)}(t_1) = \frac{d_j}{h} \left[f^{(n)}(t_0) + h f^{(n+1)}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) f^{(n+2)}(t)\, dt \right]. \tag{3.20}$$

Subtraktion von (3.19) und (3.20) liefert

$$D^n(n+1-j,j)f = \left(\frac{1}{n!} - \frac{d_j}{h} \right) M_0 + \frac{d_j}{h} M_1 + \int_{t_0}^{t_1} f^{(n+2)}(t)$$
$$\times \left[D_x^n(n+1-j,j) \frac{(x-t)_+^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{d_j}{h} (t_1 - t) \right] dt.$$

Den Wert von d_j erhalten wir aus der Gültigkeit von

$$d_j = D_x{}^n(n + 1 - j, j) \frac{(x - t_0)^{n+1}}{(n + 1)!} = \frac{j}{(n + 1)!} h, \qquad j = 0, 1, ..., n + 1,$$

wie man leicht durch Induktion über n unter Benutzung der Produktformel (3.3) beweist.

Hiermit folgt

$$\begin{aligned} D^n(n + 1 - j, j) f \\ &= \left(\frac{1}{n!} - \frac{j}{(n + 1)!}\right) M_0 + \frac{j}{(n + 1)!} M_1 + R_j(t_0, t_1, f) \\ &= \frac{n + 1 - j}{(n + 1)!} M_0 + \frac{j}{(n + 1)!} M_1 + R_j(t_0, t_1, f). \end{aligned}$$

Damit bleibt (3.18) nachzuweisen.

Wegen, $t \in [t_0, t_1]$ gilt offenbar $j(t_1 - t) = O(| t_1 - t_0 |)$ und aus Lemma 3.8 folgt durch Einsetzen der Funktion $(x - t)_+^{n+1}$ sofort

$$D_x{}^n(n + 1 - j, j)(x - t)_+^{n+1} = O(| t_1 - t_0 |).$$

Schließlich liefert die Integration von t_0 bis t_1 wegen der Stetigkeit von $f^{(n+2)}$ die Beziehung $O((t_1 - t_0)^2)$ für $R_j(t_0, t_1, f)$. ∎

4. Gleichungssysteme für reguläre Spline-Funktionen; hinreichende Bedingungen

Wir zeigen, daß die Existenz von Lösungen bestimmter Gleichungssysteme äquivalent mit der Existenz von Lösungen der betrachteten Interpolationsprobleme ist. Diese Systeme lassen sich als "gestörte" lineare Gleichungssysteme schreiben. Anschließend weisen wir nach, daß unter geeigneten Voraussetzungen eine Lösung der Interpolationsprobleme für hinreichend kleine Knotenabstände existiert. Daraus leiten sich Konvergenzaussagen ab.

Die Klassen X_i, $i = 0, 1, ..., k$ seien regulär. Wir betrachten zunächst das Randwertproblem (1.3). Es sei $s \in S_X$ eine Lösung des Randwertproblems (1.3). Wenden wir die Ergebnisse von Satz 3.1 auf die Zerlegung (1.1) des Intervalles $[a, b]$ und die in (3.4) definierten n-ten Differenzenquotienten an, so kann $D_l(s)$ in der Form

$$D_l(s) = \sum_{i=1}^{n\cdot(k+1)} c_i{}^l \Delta^n(Z_i)\, s, \qquad l = 0, 1, ..., k + 1, \qquad (4.1)$$

dargestellt werden, wobei wir in diese Darstellung gegebenenfalls Koeffizienten c_i^l mit dem Wert Null aufgenommen haben. Es sei s in der Form

$$s(t) = p_i(t) + x_i(M_i, M_{i+1}, t), \qquad p_i \in \mathfrak{P}_{n-1}, t \in I_i, i = 0, 1, \ldots, k,$$

mit

$$\frac{d^n}{dt^n} x_i(M_i, M_{i+1}, t_j) = M_j, \qquad j = i \quad \text{und} \quad j = i + 1, \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

dargestellt. Mit der Definition (3.17) geht (4.1) dann über in

$$D_l(s) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^l D_i^n(n + 1 - j, j)\, x_i(M_i, M_{i+1}, t), \qquad l = 0, 1, \ldots, k + 1, \tag{4.2}$$

wobei zwischen den Koeffizienten c_i^l und c_{ij}^l die Beziehung

$$c_{rj}^l = c_i^l, \qquad (r, j) = \operatorname{Komp}(i), \quad i = 1, 2, \ldots, n \cdot (k + 1),$$

besteht. Gleichsetzen von $D_l(s) = D_l(f)$ für $l = 0, 1, \ldots, k + 1$ führt zu dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^l D_i^n(n + 1 - j, j)\, x_i(M_i, M_{i+1}, t) = D_l(f), \qquad l = 0, 1, \ldots, k + 1, \tag{4.3}$$

zur Bestimmung der Größen $M_0, M_1, \ldots, M_{k+1}$ für das Randwertproblem (1.3).

Entsprechend gehen wir beim periodischen Interpolationsproblem (1.5) vor. Ist $s \in S_X$ eine Lösung von (1.5) und ist s periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt, so gelangt man mit den n-ten Differenzenquotienten (3.5) zu dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$\sum_{i=0}^{k+n-1} \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij}^l D_i^n(n + 1 - j, j)\, x_i(M_i, M_{i+1}, t) = \tilde{D}_l(f), \qquad l = 0, 1, \ldots, k. \tag{4.4}$$

Das System (4.4) besteht aus $k + 1$ Gleichungen zur Berechnung der Größen $M_0, M_1, \ldots, M_k$.

Für die Gleichungssysteme (4.3) und (4.4) gilt

SATZ 4.1. *Die Klassen X_i seien regulär. Dann sind äquivalent:*

(1) *Es existiert eine für X zulässige Lösung $M = (M_0, \ldots, M_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+2}$ bzw. $M = (M_0, \ldots, M_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ des Gleichungssystems* (4.3) *bzw.* (4.4).

(2) *Es existiert eine Lösung des Interpolationsproblems* (1.3) *bzw.* (1.5).

Beweis. Wie oben ausgeführt wurde, folgt (1) aus (2). Somit bleibt die Umkehrung zu zeigen. Wir betrachten nur das Randwertproblem; das periodische Interpolationsproblem läßt sich analog behandeln. Aus der Lösung M des Gleichungssystems (4.3) konstruieren wir eine Lösung $s \in S_X$ eines geeigneten Anfangswertproblems und zeigen, daß s das Randwertproblem löst. Dabei können wir aus Symmetriegründen $n_0 \leqslant n - 1$ voraussetzen.

Wir geben eine Darstellung von s im Intervall $[t_r, t_{r+1}]$ in der Form

$$s(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y_r^j}{j!} (t - t_r)^j + x_r(M_r, M_{r+1}, t), \tag{4.5}$$

$$y_0^j = (f(t) - x_0(M_0, M_1, t))^{(j)} |_{t=t_0}, \qquad j = 0, 1,..., n_0 \tag{4.6}$$

an. Da M zulässig für X ist, ist $x_r(M_r, M_{r+1}, t)$ wohldefiniert. Die noch unbekannten Größen

$$y_0^j, \qquad j = n_0 + 1,..., n - 1 \tag{4.7}$$

bestimmen wir folgendermaßen: Gilt $s \in C^n[a, b]$ in der Darstellung (4.5) von s, so folgt, daß die n-ten Differenzenquotienten

$$D_{-l}(s) := \Delta^n(\underbrace{t_0, t_0, ..., t_0}_{n_0 + l + 1}, t_1, t_2, ...)\, s, \qquad l = 1, 2,..., n - n_0 - 1$$

die Werte

$$D_{-l} := D_{-l}(s) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{-l} D_i^n(n + 1 - j, j)\, x_i(M_i, M_{i+1}, t),$$

$$l = 1, 2,..., n - n_0 - 1 \tag{4.8}$$

mit den gemäß Satz 3.1 gebildeten Konstanten c_{ij}^{-l} besitzen. Die Werte (4.8) sind durch die Lösung M eindeutig bestimmt. Da s andererseits Interpolierende zu f sein soll, setzen wir die Größen (4.7) als Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$D_{-l}(p) = D_{-l}, \qquad l = 1, 2,..., n - n_0 - 1. \tag{4.9}$$

Dabei sei $p \in \mathfrak{P}_{2n-n_0-2}$ dasjenige Polynom, das

$$p^{(j)}(t_0) = y_0^j + \frac{d^j}{dt^j} x_0(M_0, M_1, t)\Big|_{t=t_0}, \qquad j = 0, 1,..., n - 1,$$

$$p(t_i) = f(t_i), \qquad i = 1, 2,..., \min(n - n_0 - 1, k + 1),$$

$$p^{(j)}(t_{k+1}) = f^{(j)}(t_{k+1}), \qquad j = 1, 2,..., n - n_0 - k - 2,$$

erfüllt. Das Gleichungssystem (4.9) hat genau eine Lösung (4.7), da die zugehörige Matrix Dreiecksgestalt hat und ihre Hauptdiagonalelemente nicht verschwinden.

Hiermit ist die Darstellung (4.5) von s im Intervall $[t_0, t_1]$ wohldefiniert. Wir definieren s auf $[a, b]$ induktiv:

Ist s auf dem Intervall $[t_0, t_N]$ schon bekannt mit $N \leqslant k$, so sei

$$y_N{}^j := s^{(j)}(t_N)|_{[t_0, t_N]} - \frac{d^j}{dt^j} x_N(M_N, M_{N+1}, t)\Big|_{t=t_N}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Auf diese Weise ist s mit den Darstellungen (4.5) auf $[a, b]$ definiert und nach Konstruktion gilt $s \in S_X$.

Wir zeigen nun, daß s das Randwertproblem (1.3) löst. Wegen (4.6) sind die Interpolationsbedingungen im linken Randpunkt erfüllt.

Wir nehmen nun an, daß

$$s(t_i) = f(t_i) \qquad \text{für } i = 0, 1, \ldots, N-1 \leqslant k$$

gilt, und zeigen

$$s(t_N) = f(t_N). \tag{4.10}$$

Nach Satz 3.1 gilt für $l = N - n + n_0$

$$\begin{aligned} \Delta^{\nu}(\ldots, t_{N-1}, t_N)\, s &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{l} D_i{}^n(n+1-j, j)\, x_i(M_i, M_{i+1}, t) \\ &= D_l, \qquad \text{falls} \quad l < 0, \\ &= D_l(f), \qquad \text{falls} \quad l \geqslant 0; \end{aligned}$$

letzteres folgt aus (4.8) und (4.9) bzw. (4.3). Damit folgt die Behauptung (4.10) aus Lemma 3.9.

Entsprechend zeigt man, daß s die geforderten Randwerte im rechten Randpunkt annimmt.

Insgesamt ist Satz 4.1 für das Randwertproblem (1.3) bewiesen.

Aus dem Beweis dieses Satzes geht hervor, daß die Lösung $s \in S_X$ des Randwertproblems (1.3) bzw. des periodischen Interpolationsproblems (1.5) eindeutig bestimmt ist, wenn eine Lösung M von (4.3) bzw. (4.4) existiert und M eindeutig bestimmt ist. Damit haben wir in Ergänzung zu Abschnitt 2 auch für das periodische Interpolationsproblem eine Eindeutigkeitsaussage erhalten.

Wir wollen nun zeigen, daß die betrachteten Gleichungssystemen äquivalent sind mit gestörten linearen Gleichungssystemen.

Für die Gleichungen (4.3) gilt nach Lemma 3.10, wenn wir $X_i \subset C^{n+2}[I_i]$ voraussetzen und $D_l(s) = D_l(f)$ benutzen,

$$\begin{aligned} D_l(s) &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^l D_i^{\,n}(n+1-j, j)\, x_i(M_i, M_{i+1}, t) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^l \left[\frac{n+1-j}{(n+1)!} M_i + \frac{j}{(n+1)!} M_{i+1}\right] \\ &\qquad + \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^l R_j(t_i, t_{i+1}, x_i)}_{=:\, -R_l(s)} \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} d_i^{\,l} M_i - R_l(s), \qquad l = 0, 1, \dots, k+1, \end{aligned} \tag{4.11}$$

mit

$$\begin{aligned} d_0^{\,l} &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n} (n+1-j)\, c_{0j}^l, \\ d_i^{\,l} &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n} (j c_{i-1j}^l + (n+1-j)\, c_{ij}^l), \qquad i = 1, 2, \dots, k, \\ d_{k+1}^l &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n} j c_{kj}^l, \end{aligned} \tag{4.12}$$

also

$$\sum_{i=0}^{k+1} d_i^{\,l} M_i = D_l(f) + R_l(s), \qquad l = 0, 1, \dots, k+1. \tag{4.13}$$

Entsprechende Überlegungen führen im Falle des periodischen Interpolationsproblems (1.5) zu

$$\sum_{i=0}^{k} \tilde{d}_i^{\,l} M_i = \tilde{D}_l(f) + \tilde{R}_l(s), \qquad l = 0, 1, \dots, k.$$

Analog gilt für jede Funktion $f \in C^{n+2}[a, b]$

$$\sum_{i=0}^{k+1} d_i^{\,l} f^{(n)}(t_i) = D_l(f) + R_l(f), \qquad l = 0, 1, \dots, k+1, \tag{4.14}$$

und für jede Funktion $f \in C^{n+2}(\mathbb{R})$ mit der Periode $b - a$ oder deren n-te Ableitung die Periode b-a besitzt

$$\sum_{i=0}^{k} \tilde{d}_i^{\,l} f^{(n)}(t_i) = \tilde{D}_l(f) + \tilde{R}_l(f), \qquad l = 0, 1, \dots, k. \tag{4.15}$$

Nach Lemma 3.7 sind die Koeffizienten d_i^l und $\tilde{d}_i^l$ nichtnegativ. Aus (4.14) bzw. (4.15) folgt für $f(t) = t^n$

$$\|(d_i^l)\|_\infty = \|(\tilde{d}_i^l)\|_\infty = 1/n!\ ;$$

dabei bedeute $\| A \|_\infty$ die Zeilensummennorm von A,

Um Aussagen für kleine Knotenabstände gewinnen zu können, werden wir die Zerlegung (1.1) des Intervalls $[a, b]$ verfeinern. Genauer werden wir Zerlegungen

$$a =: t_0^j < \cdots < t_{k_j}^j < t_{k_j+1}^j := b, \qquad j = 0, 1,..., \tag{4.16}$$

des Intervalls $[a, b]$ konstruieren mit

$$\{t_i \mid i = 1, 2,..., k\} \subset \{t_i^j \mid i = 1, 2,..., k_j\}, \qquad j = 0, 1,.... \tag{4.17}$$

Bedingung (4.17) gewährleistet, daß jedes Intervall $[t_i^j, t_{j+1}^j]$ in nur einem Intervall $[t_l, t_{l+1}]$ enthalten ist. Dann sei S_X so definiert, daß in allen Intervallen

$$I^* := [t_i^j, t_{i+1}^j] \subset [t_l, t_{l+1}]$$

die Einschränkungen von X_l auf I^* verwendet seien. Damit ist auch für alle Zerlegungen (4.16) die Klasse S_X definiert.

Zu der Zerlegung (4.16) definieren wir

$$\begin{aligned} h_i &:= t_{i+1}^j - t_i^j, \qquad i = 0, 1,..., k_j\,, \\ h &:= \max_{0 \leqslant i \leqslant k_j} h_i\,, \\ q &:= \max_{0 \leqslant i \leqslant k_j} (h/h_i), \end{aligned}$$

und betrachten $h \to 0$.

Eine Funktion $f \in C^n[a, b]$ heißt zulässig für X (bei $h \to 0$), wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so daß für jede Zerlegung (4.16) des Intervalls $[a, b]$ mit (4.17) die Parameter M_i mit

$$| M_i - f^{(n)}(t_i^j)| \leqslant (\delta/q) \cdot h, \qquad i = 0, 1,..., k_j + 1$$

zulässig für X sind.

Weiterhin bezeichnen wir mit A_h bzw. $\tilde{A}_h$ die zu den Zerlegungen (4.16) gehörenden Matrizen (d_i^l) bzw. $(\tilde{d}_i^l)$, die die Gleichungssysteme für die Theorie der polynomialen Splines liefern.

Damit sind wir in der Lage, unser Hauptergebnis zu beweisen.

SATZ 4.2. *Zu beschränktem q sei eine Folge von Zerlegungen* (4.16) *mit* (4.17) *gegeben. Die zugehörigen Matrizen A_h bzw. $\tilde{A}_h$ seien invertierbar und die*

Zeilensummennormen ihrer Inversen gleichmäßig beschränkt. Ferner sei $f \in C^{n+2}[a, b]$ zulässig für X, und die Klassen X_i mögen den Bedingungen (R), (D) *und* (B) *genügen. Im Falle des periodischen Interpolationsproblems habe f die Periode $b - a$.*

Dann existiert eine Lösung des Randwertproblems (1.3) *bzw. des periodischen Interpolationsproblems* (1.5) *bezüglich S_X für hinreichend kleines h.*

Beweis. Wir beweisen den Satz für das Randwertproblem (1.3). Der Beweis für den periodischen Fall verläuft analog. Wie oben ausgeführt wurde, genügt es, eine Lösung M des Systems (4.13) zu finden. Setzen wir $R_l^*(M) = R_l(s)$, so ist

$$\sum_{i=0}^{k+1} d_i^l M_i = D_l(f) + R_l^*(M), \qquad l = 0, 1, \ldots, k+1 \tag{4.18}$$

mit $M = (M_0, M_1, \ldots, M_{k+1})$ zu lösen, wobei $k = k(h)$ von der Zerlegung (4.16) abhängt. Nach Subtraktion von (4.14) geht (4.18) über in

$$\sum_{i=0}^{k+1} d_i^l(M_i - f^{(n)}(t_i)) = R_l^*(M) + R_l(f), \qquad l = 0, 1, \ldots, k+1. \tag{4.19}$$

Mit

$$W_i := M_i - f^{(n)}(t_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, k+1 \tag{4.20}$$

erhalten wir, wenn wir $R_l^*(W) = R_l^*(M)$ setzen,

$$\sum_{i=0}^{k+1} d_i^l W_i = R_l^*(W) + R_l(f). \tag{4.21}$$

Aus (4.11), den Lemmata 3.4 und 3.7 und aus (3.18) folgt

$$R_l(f) = O(h^2), \qquad l = 0, 1, \ldots, k+1 \tag{4.22}$$

mit gleichmäßig beschränkten Funktionen $O(h^2)$, weil $f \in C^{n+2}[a, b]$ vorausgesetzt ist.

Da f zulässig für X ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß die Werte $M_i \in [f^{(n)}(t_i) - (\delta/q)\,h, f^{(n)}(t_i) + (\delta/q)\,h]$ zulässig für X sind. Da q beschränkt ist, nehmen wir zwecks Vereinfachung des Beweises $\delta/q = 1$ an. Dann ist jedes

$$M_i \in [f^{(n)}(t_i) - h, f^{(n)}(t_i) + h], \qquad i = 0, 1, \ldots, k+1$$

zulässig für X. Wegen (4.20) bedeutet dies, daß der Würfel

$$|\, W_i \,| \leqslant h, \qquad i = 0, 1, \ldots, k+1, \tag{4.23}$$

zulässig ist. Dies impliziert

$$\begin{aligned}\Delta^1(t_i, t_{i+1}) M &= \Delta^1(t_i, t_{i+1}) f^{(n)} + \Delta^1(t_i, t_{i+1}) W \\ &= f^{(n+1)}(t_i) + O(h) + O(1) = O(1)\end{aligned}$$

mit gleichmäßig beschränkten Funktionen $O(1)$, da q beschränkt ist. Da (B) für die Klassen X_i gilt, sind die Funktionen $s^{(n+2)}$, parametrisiert durch M, in den Teilintervallen von $[a, b]$ gleichmäßig beschränkt für $h \to S$. Wie beim Beweis von (4.22) folgt daher

$$R_l(M) = R_l(W) = O(h^2), \qquad l = 0, 1, \ldots, k + 1, \tag{4.24}$$

mit gleichmäßig beschränkten Funktionen $O(h^2)$. Insgesamt erhalten wir unter der Bedingung (4.23), daß

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1} d_i{}^l W_i &= R_l(W) + R_l(f), \qquad l = 0, 1, \ldots, k + 1, \\ &= O(h^2)\end{aligned} \tag{4.25}$$

mit gleichmäßig beschränkten Funktionen $O(h^2)$ gilt. Da die Normen $\| A_h^{-1} \|$ als gleichmäßig beschränkt vorausgesetzt sind, können wir

$$| R_l(W) + R_l(f)| \leqslant K_h := h \cdot \| A_h^{-1} \|_\infty^{-1}, \qquad l = 0, 1, \ldots, k + 1, \tag{4.26}$$

für hinreichend kleine h erreichen.

Wir zeigen nun, daß (4.25) einen Fixpunkt W besitzt. Es sei $H := [-h, h]^{k+2}$ und φ die lineare Abbildung $\varphi : H \to H$ mit

$$\varphi(W) := A_h W.$$

Wegen $\| A_h \|_\infty \leqslant 1$ ist φ eine Abbildung von H in sich. Weiterhin sei ψ die Abbildung

$$\psi : H \to [-K_h, K_h]^{k+2}$$

mit

$$\psi(W_0, \ldots, W_{k+1}) := (R_0(W) + R_0(f), \ldots, R_{k+1}(W) + R_{k+1}(f)).$$

Nach Voraussetzung (D) ist ψ stetig. φ ist ein Homöomorphismus von H auf $\varphi(H)$. Also ist $\psi \circ \varphi^{-1}$ stetig. Weiterhin enhält $\varphi(H)$ den Würfel

$$W_h := \{W \in \mathbb{R}^{k+2} \mid | W_i | \leqslant K_h, i = 0, 1, \ldots, k + 1\}$$

mit K_h aus (4.26). Also ist die Abbildung

$$\psi \circ \varphi^{-1} : W_h \to W_h$$

eine stetige Abbildung einer endlichdimensionalen konvexen Menge in sich. Nach dem Fixpunktsatz von Brouwer gibt es ein $y = (y_0, \ldots, y_{k+1}) \in W_h$ mit

$$\psi \circ \varphi^{-1}(y) = y.$$

Für

$$W^* := (W_0{}^*, W_1{}^*, \ldots, W_{k+1}^*) := \varphi^{-1}(y)$$

gilt dann

$$\psi(W^*) = y,$$

also

$$\sum_{i=0}^{k+1} d_i{}^l W_i{}^* = R_l(W^*) + R_l(f), \qquad l = 0, 1, \ldots, k+1.$$

Also gibt es eine Lösung W^* von (4.25) für hinreichend kleines h und mittels (4.20) eine Lösung M von (4.18). Damit ist der Satz für das Randwertproblem (1.3) bewiesen.

Bemerkung 4.3. (1) Satz 4.2 setzt die Beschränktheit der Normen von A_h^{-1} bzw. $\tilde{A}_h^{-1}$ explizit voraus. Dies trifft z.B. zu für die Matrizen $\tilde{A}_h^{-1}$, falls n gerade und die Zerlegung (4.16) asymptotisch äquidistant verteilt ist (Ahlberg [2]). Im Falle des Randwertproblems ist die Beschränktheit der Normen von A_h^{-1} in der Literatur bislang nur für $n = 2$, $n_0 = n_1 = 1$ bekannt (vgl. Ahlberg *et al.* [1]). Untersuchungen an der Universität Münster [17, 18] zeigen, daß für gerades n und $n_0 = n_1 = n/2$ die Normen von A_h^{-1} bei äquidistanter Verteilung (4.16) zumindest für $n = 4, 6, \ldots, 12$ beschränkt bleiben (siehe auch de Boor [5]).

(2) Die Definition der Zulässigkeit von f ist so ausgelegt, daß sich als zulässiger Bereich der W_i direkt der Würfel (4.23) ergibt. Man kann jedoch die Zulässigkeit von f so wohl schwächer als auch stärker formulieren, ohne daß die Aussage von Satz 4.2 davon berührt wird. Fordert man als Zulässigkeit von f für X, daß es ein $\delta > 0$ gibt, so daß alle

$$M_i \in [f^{(n)}(t_i) - (\delta/q)\, h^p, f^{(n)}(t_i) + (\delta/q)\, h^p], \qquad 0 \leqslant p < 2,$$

für $i = 0, 1, \ldots, k+1$ zulässig für X sind, so ergibt sich (mit $\delta/q = 1$) statt (4.23) als zulässiger Bereich der W_i der Würfel

$$|W_i| \leqslant h^p, \qquad i = 0, 1, \ldots, k+1. \tag{4.23'}$$

Für $0 \leqslant p \leqslant 1$ bleibt der Beweis von Satz 4.2 unverändert, indem man statt (4.23′) für hinreichend kleine h wiederum nur den Teilwürfel (4.23) betrachtet, während man im Falle $1 < p < 2$ direkt von dem Würfel (4.23′) ausgeht.

Letzteres führt zu

$$\Delta^1(t_i, t_{i+1})\, M = f^{(n+1)}(t_i) + O(h^{p-1}), \qquad i = 0, 1, \ldots, k+1,$$

d.h. in diesem Falle liegt sowohl der betrachtete Parameterbereich von M "nahe" bei $f^{(n)}$ als auch $\Delta^1 M$ "nahe" bei $f^{(n+1)}$.

(3) Die Existenzaussage von Satz 4.2 kann unter schwächeren Voraussetzungen gefolgert werden. Es genügt, daß sich die Normen der Matrizen A_h^{-1} bzw. $\tilde{A}_h^{-1}$ wie

$$\| \overset{(\sim)}{A}{}_h^{-1} \|_\infty = O(h^{-p}), \qquad 0 \leqslant p < 1,$$

gleichmäßig in h verhalten. Der Beweis von Satz 4.2 bleibt dann im wesentlichen unverändert; jedoch verschlechtern sich die Konvergenzaussagen des folgenden Satzes 4.4 um den Faktor h^{-p}.

(4) Gilt zusätzlich zu Bedingung (D), daß die $(n + 2)$-ten Ableitungen von $x_i \in X_i$ stetige partielle Ableitungen nach den Parametern M_j besitzen, so kann eine Lösung von (4.18) mittels des kontrahierenden Iterationsverfahrens

$$M^{(i+1)} = A_h^{-1}(D(f) + R^*(M^{(i)})), \qquad i \in N,$$

für hinreichend kleine h gewonnen werden, da dann auch

$$\partial R_i / \partial M_j = O(h^2)$$

mit gleichmäßig beschränkten Funktionen $O(h^2)$ gilt, wie aus der Darstellung von R_j aus Lemma 3.10 hervorgeht (vgl. Werner [15]).

(5) Gilt $S_X = S_{n+1,k}$, liegt also der lineare Fall vor, so genügt für die Existenz einer Lösung der Interpolationsaufgaben selbstverständlich die Existenz der Inversen A_h^{-1} bzw. $\tilde{A}_h^{-1}$, die für A_h^{-1} stets gewährleistet ist (vgl. z.B. Ahlberg *et al.* [1] und Karlin und Ziegler [9]).

Satz 4.4. *Es mögen die Voraussetzungen von Satz* 4.2 *erfüllt sein, und* $s \in S_X$ *sei die Lösung des Randwertproblems* (1.3) *bzw. des periodischen Interpolationsproblems* (1.5) *für hinreichend kleines* h *und beschränktes* p.

Dann gilt

$$(d^i/dt^i)(f(t) - s(t) = O(h^{n+2-i}), \qquad i = 0, 1, \ldots, n+2,$$

gleichmäßig in $t \in [a, b]$.

Der Beweis verläuft analog dem Beweis des entsprechenden Satzes von Werner [15].

ACKNOWLEDGMENT

Diese Arbeit ist Teil meiner an der Universität Münster angefertigten Dissertation. Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr. H. Werner für die Förderung dieser Arbeit und seine wertvollen Verbesserungsvorschläge. Ebenfalls dankbar bin ich Herrn Professor Dr. D. Braess für seine Anregungen während der Anfertigung dieser Arbeit.

REFERENCES

1. J. H. AHLBERG, E. N. NILSON, AND J. L. WALSH, "The Theory of Splines and Their Applications," Academic Press, New York/London, 1967.
2. J. H. AHLBERG, Best approximation and convergence properties of higher-order spline approximations, *J. Math. Mech.* **14** (1965), 231–243.
3. H. ARNDT, On uniqueness of best spline approximations with free knots, *J. Approximation Theory* **11** (1974), 118–125.
4. H. ARNDT, "Interpolation mit regulären Spline-Funktionen," Dissertation, Münster, 1974.
5. C. DE BOOR, On the convergence of odd-degree spline interpolation, *J. Approximation Theory* **1** (1968), 452–463.
6. D. BRAESS, Rationale Interpolation, Normalität und Monosplines, *Numer. Math.* **22** (1974), 219–232.
7. D. BRAESS AND H. WERNER, Tschebyscheff-Approximation mit einer Klasse rationaler Splinefunktionen, II, *J. Approximation Theory* **10** (1974), 379–399.
8. H. B. CURRY AND I. J. SCHOENBERG, On polya frequency functions. IV. The fundamental splines and their limits, *J. Analyse Math.* **17** (1966), 71–107.
9. S. KARLIN AND Z. ZIEGLER, Chebyshevian spline functions, *SIAM J. Numer. Anal.* **3** (1966), 233–270.
10. R. RUNGE, "Lösung von Anfangswertproblemen mit Hilfe nichtlinearer Klassen von Spline-Funktionen," Dissertation, Münster, 1972.
11. R. SCHABACK, Spezielle rationale Splinefunktionen, *J. Approximation Theory* **7** (1973), 281–292.
12. R. SCHABACK, Interpolation mit nichtlinearen Klassen von Spline-Funktionen, *J. Approximation Theory* **8** (1973), 173–188.
13. H. SCHOMBERG, "Tschebyscheff-Approximation durch rationale Splinefunktionen mit freien Knoten," Dissertation, Münster, 1973.
14. H. WERNER, Tschebyscheff-Approximation mit einer Klasse rationaler Splinefunktionen, *J. Approximation Theory* **10** (1974), 74–92.
15. H. WERNER, Interpolation and integration of initial value problems of ordinary differential equations by regular splines, *SIAM J. Numer. Anal.* **12** (1975), 255–271.
16. H. WERNER AND R. SCHABACK, "Praktische Mathematik II," Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1972.
17. H. ARNDT AND B. EICKENSCHEIDT, Zur Konvergenz von Splines, *ISNM* **30** (1976), 35–42.
18. B. EICKENSCHEIDT, "Zur Konvergenz des Randwertproblems bei der Interpolation mit regulären Spline-Funktionen," Diplomarbeit, Münster, 1974.